

2015年6月
オックスフォード大学
山田 倫大

船井情報科学財団 第6回留学生レポート

オックスフォード大学計算機科学科博士課程に所属しています、山田倫大です。早いもので、自分にとって3年目にあたる今年度も終わりを迎えようとしています。学期末のため、毎日の様にサブファスク¹に身を包んだ学生が緊張した面持ちで試験会場に向かう光景が見受けられます。この数週間後には彼らのほとんどが故郷に戻り、街は静かで穏やかな夏の様相を帯びるようになります。いつしかこの光景も見慣れたものとなり、夏の到来を告げる風物詩のように感じられます。

前回のレポートでは研究に関する焦りと苦悩について綴りましたが、今年に入り大きな進展がありました。その中で、自分の研究における“美しさ”という価値の大きさを再確認しました。これと前後して英・仏の美術館を訪れたことも研究に対する動機や熱意に大きな影響を与えました。本稿ではこれらの内容について書きたいと思います。

1. かみ合い始めた歯車

はじめに研究の進捗状況について書きます。

1.1. 3部構成の研究計画

前回のレポートに綴ったように、研究トピックとして挑戦的な問題に拘ったため3年目に入っても中々成果を出せず焦りを感じていました。そこで自分の興味を追求しつつも、より現実的な問題を段階的に設定しました。具体的に、研究内容は以下の3段階で構成されます：

1. 既存のゲーム意味論²に“動的な計算過程”に対応する演算を導入
2. 1を基に数学的な計算のモデル³を構築
3. 2と他の計算モデル（特にHoTT⁴）との間の対応を確立

(本稿では段階2, 3についての説明を省略します。)

¹ サブファスクとはオックスフォード大学が指定する学生の制服（正装）です。試験を受ける際、学生はこの着用を義務付けられます。

² ゲーム意味論については第4回レポートを参照して下さい。

³ 数学では集合（集合論）や図形（幾何学）など種々の概念を定式化し、その構造や性質について探求します。自分の専門分野の1つ、計算理論という分野では計算モデルを考案することで計算という概念を定式化し、その構造や性質を探求します。

⁴ HoTTについては第4回レポートを参照して下さい。

1.2. かみ合い始めた歯車

2015年初旬から段階1の内容について研究を行ってきました。当初、段階1で導入する演算はそれ程複雑なものではなく、大きなウェイトを占める内容ではないと考えていたのですが、ここに嬉しい誤算がありました。この演算を数学的に整った形で定式化するために既存のゲーム意味論に新たな概念や公理を導入したのですが、これにより新しい数学的構造を備え、より一般化されたゲーム意味論の構築に至りました。本稿ではこの亜種を動的ゲーム意味論と呼ぶことにします。

動的ゲーム意味論はそれ自体が興味深い数学的概念であり、研究する内容が散りばめられていました。次々と湧き上がるアイデアや考察にそれを書き留める作業が追い付かないということがよくありました。ある定理の証明のために別の複数の補題が必要であり、その補題自体が興味深い内容であるといったことも幾度となくありました。自分の中で、何か歯車がかみ合い、導火線に火が付いたような感覚がありました。“研究トピック探し”というトンネルを中々抜けられないフラストレーションも大きかったのでしょう、研究を行うという久しぶりに味わう感覚に対する喜びはひととき大きなものでした。夢中で研究を続けているうちに、気が付けば原稿は100ページを超えようとしていました。

1.3. 初めての国際舞台へ

幸運なことに、研究の成果を発表する機会にも恵まれました。まず、研究グループ内のセミナーで1時間程度の講演を行ったところ、多くの仲間からポジティブなフィードバックがありました。これと前後して指導教授と話し合った結果、当初はあくまで準備段階にあたりと考えていた段階1はそれ自体が興味深い数学的内容となったため、これを独立した成果として発表することとなりました。

丁度今年には記号論理学への貢献などで高名な英国人数学者ジョージ・ブールの生誕200周年にあたり、これを記念した大きな国際会議が彼の勤務していたコーク大学（アイルランド）で8月下旬に開かれます。その中のセッションの1つ、計算の数学的基礎をテーマとした [Domain XII](#) にこれまでの研究内容の要旨を投稿したところ、幸運にもこれが受理されました。この会議には著名な数学者・理論計算機科学者が数多く出席します。自分は25分程度の講演を行う予定であり、またこの会議を記念して出版される書籍に論文を寄稿する機会も与えられました。自分の研究内容を発表する絶好の機会に恵まれたと言えます。残り約2か月間、しっかりと準備をして臨みたいと思います。

2. 数学における美

次に、現在行っている研究の内容について書きたいと思います。発表前の内容であるため、本稿ではその魅力に焦点を当てたいと思います（より詳細な研究内容については次

回に譲りたいと思います)。その中で“数学における美しさ”についても考えたいと思います。自分の研究の魅力が少しでも伝われば幸いです。

2.1. 自分の研究トピックであるという感覚

研究の成果が出たことはもちろん嬉しかったのですが、それと同じくらい自分を高揚させたのは“研究内容が自分のトピックである”という感覚でした。

まず、解く問題が自分の数学的特性に合った内容でした。そのため定義や予想の設定、及び証明はかなりスムーズに進みました。自分が学部時代に学び、研究したことのある分野が関連分野であることもプラスに働いたと考えられます⁵。

また何より、自分の研究興味 - “基礎となる概念を持った美しい数学”⁶ - に合っていることが大きかったように思います。目の前で構築されていく内容に自分自身がワクワクし魅せられる感覚がありました。もちろんオリジナルな結果を出すことに対する高揚感はありましたが、これに加えて動機や価値を見出すことのできる研究内容であることが非常に嬉しかったのです。以下、自分の研究に対する動機や価値観について少し掘り下げてみたいと思います。

2.2. 数学における美しさ

ここで少し脱線して、“数学における美しさ”について考えたいと思います。数学が美しいという感覚は多くの数学者に共有されているものです。数学の何が美しいのかという点には様々な視点や意見があり、またそもそも美や数学とは何かという哲学的な問題が絡むためここで深く掘り下げることはしませんが、自分の視点を簡潔に(本稿の内容に必要な程度に)まとめてみたいと思います。

まず、数学に現れる美は“純粋数学的”なもの、“物理数学的”なものという2種類に大別できると考えます(1つの数学的内容がこの2種類の美を同時に有することはあり得ます)。ここでは数学自体に潜む美しさ - 例えば証明の美しさ、定理(結果)の美しさ、数学的概念や発想の美しさなど - を純粋数学的な美と呼ぶことにします。そこには禁欲的とも言えるほど完璧な美しさが存在しています: 綿密に考え抜かれた定義、鋭い洞察や鮮やかな閃きに彩られた証明、絶妙なバランスの上に成り立つ定理、これらが一点の曇りもない論理で繋がりドラマチックなストーリーを紡ぎだします。およそこの

⁵ ゲーム意味論は本質的には組み合わせ論に属する概念ですが、そこに抽象的な抽象代数学や圏論の構造が現れます。もちろん計算理論にも深い関連があります。

⁶ 不変の真理を明らかにし、これを厳密で美しい数学として記述したいという動機が根底にあります。また、その対象は数学の世界の中だけで閉じた、ともすれば“abstract nonsense”とも揶揄されるようなものではなく、この宇宙に現れる現象を的確に捉えたものであることが理想です。なお、ホームページの冒頭にも同じ言葉を使っています: <https://www.cs.ox.ac.uk/people/norihiro.yamada/>

世界には存在し得ない完全性や普遍性を有する数学に、人は憧れとも言える感情を抱くのでしょ

う。さらに、人間の思考の産物であるはずの数学がこの宇宙で起こる様々な現象を驚くほどの確に捉えているという事実がその存在をさらに神秘的で絶対的なものと感じさせます。ハンガリー人物理学者のユージン・ウィグナーは「自然界の本質を見極めようとするとき、数学は理屈に合わないほど有効だ。」と述べました。より有名な言葉としては、イタリア出身で同じく物理学者のガリレオ・ガリレイが残した「宇宙は数学という言葉で書かれている。」が挙げられるでしょう。このように、数学がこの世界を正確に記述していることに関して現れる美しさ - この宇宙の仕組みや成り立ちを捉えた真実としての美しさとも言えるかもしれません - をここでは物理数学的な美と呼ぶことにします。現実世界と関わりがあるからこそ、数学は単に無意味な知的ゲームではなく、真実を厳密かつ絶対的な形で捉えた尊い学問であると言えるのです⁷。

なお、先ほど示した自分の研究興味にも表現されていますが、自分は両方の数学的美しさを追い求めています。そこには数学的・物理的真実の両方を美しい芸術作品として記述したいという動機があります⁸。因みに理論計算機科学はこの研究興味に適合した分野であると言えるでしょう：計算及びそれに関わる概念は純粋に数学的な概念ですが、そこから得られた数学的結果は計算という現象を通してこの世界に実在します。

2.3. 複雑さと単純さの対比

話を動的ゲーム意味論に戻します。段階 1 では、動的ゲーム意味論それ自体を興味深い数学的構造として構築し、抽象代数学や圏論の観点からその性質を探求しました。この中に現れる美しさは純粋数学的なものと言えるでしょう。直観やコンセプトに基づいて定義した構造が、予想以上に綺麗な性質を持つということが幾度となくありました。それらがピタリと嵌り合い、小さな結果を積み重ね、やがて（関連する条件を強めても弱めても得られないという）ギリギリのバランスの上に成り立つ定理が立ち現われました。

自分は特にこの中で繰り返される複雑さと単純さという対比に美しさを見出しました⁹。ゲーム意味論における定理は大抵数行で述べられるような簡潔なものが多いのですが、その証明は複雑な組み合わせ数学となり数ページに及ぶことがほとんどです。言葉を変えると、「複雑な現象を簡潔な表現で捉えている」とも言えます。自分はここに、

⁷ 数学史に残る偉大な数学者、カール・フリードリヒ・ガウスは「数学は科学の女王である。」と言う言葉を残しています。

⁸ 英国人数学者、イアン・スチュアートも著書“若き数学者への手紙”の中で「純粋数学と応用数学どちらか片方だけを選ぶ必要はない、両方を選ぶべきである。」と述べています。

⁹ 物理数理学者ディビッド・ルエールも著書“数学者の頭の中”の中で「数学がかくも美しいのは、この学問が課す厳格で論理的な枠組みのなかに、ともに潜んでいる単純さと複雑さが明るみになるからではなからうか。」と述べています。

珠玉の詩がこの世の複雑な営みやその理を簡潔な言葉で的確に捉えていることにも似た美しさを感じるのです。

話が抽象的過ぎるため、ここで少しだけ例を挙げたいと思います。ゲーム意味論には“計算方法”に相当する**戦略**という概念と、戦略が計算を行う“場”に相当する**ゲーム**という概念があります。ここでは戦略 σ がゲーム G に属することを $\sigma : G$ と書くことにします。動的ゲーム意味論では戦略とゲームの両方に関する演算 H を定義し、これに際して戦略とゲームに新しい構造や公理を追加しました。その結果、例えば

- 任意の戦略 $\sigma : G$ に対して、 $H(\sigma) : H(G)$ が成り立つ
- これまでのゲーム意味論で考案された（ゲームや戦略に関する）演算は動的ゲーム意味論で追加された公理を全て保存する

- “部分ゲーム”というゲーム間の関係 \leq を定義した結果、ゲームに対する任意の2項演算*に対して、 $H(G_1 * G_2) \leq H(G_1) * H(G_2)$ が成り立つ (G_1, G_2 は任意のゲーム) といった結果が得られました。このように主要な定理は簡潔に述べられるものがほとんどです。しかし、例えば1つ目の定理を証明するまでに57ページを必要とします。

2.4. これから目指す美しさ

研究計画の段階2では動的ゲーム意味論を計算理論の観点からさらに発展させ、段階3では適当な（単純で理論的な）プログラミング言語との関連を調べます。ここで計算という概念を通して現実世界との接点が生まれます；数理物理学的な美を探求する段階と言えるでしょう。

特に演算 H は計算過程及び数学における“内包性”¹⁰を定式化する大きな可能性を持っていると考えられます。これから、動的ゲーム意味論が如何に種々の概念を捉えるか、という点を明らかにしていきたいと思います。

3. 写実派かつ印象派を目指して

研究の成果が出始める頃と前後して、パリのルーブル美術館とオルセー美術館、及びロンドンのナショナル・ギャラリーで開催されていた印象派の特別展を訪れる機会がありました。そこで、研究に対する動機や情熱に関して大きな影響を受けました。

3.1. 印象派との出会い - 真と美の抽出

絵画の中で、印象派は特に魅力を感じるスタイルの1つです。その理由は印象派の絵が“絵画の使命”に最も適合しているスタイルであることかもしれません。個人的に、絵画は写真では表現不可能なものを表すことができるからこそ価値があると考えます：絵画はこの世界に存在する体験やそれに伴う感情のエッセンスを抽出しこれを濃縮するこ

¹⁰ 内包性については第4回レポートに簡潔な説明があります。

とが可能で、それはこの世界を正確に描写したものではなくても、凝縮された体験や感情を与えることで人々の人生を豊かにします。これが“絵画の使命”と言えないでしょうか？

さらに言えば、絵画は現実の正確な描写でなくとも、そのほとんどがあくまでこの宇宙で起きたことの理想化・抽象化であり、この意味において真実を捉えているとすることができます。つまり絵画（より一般的に芸術）は真と美の抽出が本質であり、印象派の作品はこの理念を分かりやすく体現しているということです。

3.2. 印象派の作品が教えてくれたこと

今回英・仏の美術館を訪れ、印象派の傑作を目の当たりにする中で、“この世界の真実を抽出しこれを美しい芸術作品として記録する”ということの価値を肌で感じました。初めて見たはずの絵が、過去の体験やそこで得た感情を思い起こさせました。特にその場面のエッセンスが抽出され、美しく理想化されたことにより、その感情はより美化され強められるのでした。

また、美はそれ自体が価値を持つということも強烈に体感しました。絵に目が釘付けになりその場からしばらく離れられなくなるということが何度もありました。世界中から訪れる無数の訪問者を考えても、美には普遍的で根源的な価値があると言えるでしょう。理論的な研究は知的興味と真実を美しい形で記録したいという動機に基づくことが多いですが、そのことに間違いなく価値があると一層強く思えるようになりました¹¹。

3.3. 写実派かつ印象派を目指して

印象派の作品はその名の通り、主に日常の営みや風景の中に生まれる印象や感情を対象とする一方、数学は論理的な概念や構造を対象とします。前者は人々の心象体験を、後者は知的財産を豊かにするとも言えます。このような違いはあるものの、それぞれの真実を抽出し、これを美しい作品として記述するという点において両者には大きな共通点があるように思うのです。

数学の論文は美しい芸術作品でなくてはならないという意見を持つ数学者は少なくありません。ポピュラーサイエンスやSF関連の作家としても著名な英国人数学者イアン・スチュアートは、著書“若き数学者への手紙”で「数学の証明は物語と見ることができる。全ての詳細を機械的に述べるのではなく、よい証明とは自明な詳細を省き、発見のあらすじ、ハイライト、美しさや感動を伝えるものでなくてはならない。」と述べています。純粋数学と理論物理学において顕著な業績を残した20世紀を代表するドイツ人数学者ヘルマン・ワイルは「真と美の2択を迫られたとき、よく美を選んだ。」とさえ言いました。

¹¹ 正確には、「人類の知的財産への貢献という第一義的な動機に加え、美という動機が自分の中でより鮮明になった。」と言った方がよいかもしれません。

数学者は真実を捉えるという意味において写実派の最高峰に位置すると言えるかもしれません。自分は写実派であり、かつ印象派でありたいと思います。英・仏で出会った数々の絵画は自分の追い求めているものの素晴らしさを改めて教え、そして背中をやさしく押してくれたように感じられました。



セーヌ川から望んだオルセー美術館