留学報告書（2025 年 6 月）

渡邊優大

2025 年 6 月 18 日

1　はじめに

University of California San Diego (UCSD) で PhD student をしている渡邊です。制御理論や連続最適化を研究しています。UCSD に進学して 9 ヶ月が経過しました。今回は私生活、研究、コースワークなどについて書きたいと思います。

2　私生活について

まずは私生活からお話しします。研究やコースワーク（後述）の勝手もわかってきたので、それなりに楽しく私生活を送れているかなと思います。主な息抜きは 3 つあります。一つ目は Grad housing にある焚き火（正式名称を知らない）で寝る前に研究とは関係のない読書をすることです（図 1）。読む本は人文系だったり数学書だったり誰かのブログ記事だったり色々です。このような屋外での読書もじつは雨が少なく夜が涼しい南カリフォルニアならではの楽しみなのではないでしょうか。火を見ていると自然と気持ちがクリアになり自室よりも本に集中することができます。研究をやっていると論文ばかり読む状態になりがちなのでこの習慣は今後も続けていきたいものです。あと暖炉のある家を手に入れることが将来の夢になりました。二つ目は映画やアニメ、動画を視聴することです。とくに年明け頃からスペイン人の同期と週末に数話ずつアニメ等を見る会をしています。彼とはオフィスも一緒で分野も近いため今後とも仲良くしていきたいところです。三つ目はランニングです。京大時代からの趣味で、5 月にはアメリカでは初めてのハーフマラソンに出場しました。ラホヤの美しい海岸線を走る人気のハーフマラソンで、美しいオーシャンビューや途中何度か丘を登る箇所があるなど、ユニークで魅力的なコースでした。結果はタイムが 1 時間 39 分 24 秒，順位が約 4450 人中 189 位でした。高低差が大きいコースでの 100 分切りが達成でき雰囲気も楽しめたので満足です。来年は 1 時間 30 分を目指して再チャレンジしたいと思います（仲間募集中です）。アメリカでのフルマラソンにもチャレンジしたいですね（こちらも仲間募集中です！）

3　研究について

引き続き制御理論と最適化を頑張っています。UCSD で研究を始めて一年近く経とうとしていますが、周囲の人との関係性も良好で、良い先生や同僚と巡り会えたかなと思います。また、京大時代のテーマよりも一般性の高い基礎的な問題に取り組めており、この点はじつは留学のモチベー

図 1

図 2: ハーフマラソンの様子

図 3: ゴールの瞬間

ションのひとつでもあったので、希望を叶えられたこの幸運に感謝です。UCSD 内の友達も徐々に増えており、主にオフィスが同じの制御系学生らとの日常的な研究の議論・交流も楽しんでいます。2025 年に入っていくつか論文を投稿し新しいトピックにも着手し始めたので簡単にご紹介します。

3.1 投稿した論文について

投稿した論文について 2025 年に入って、2 本の論文を arXiv に投稿しました。いずれも UCSD で行った制御理論の論文で、主に SDP や双対性による新しい解析解の導出法やよく知られた性質の新しい証明などを提案しています。ニッチではあるものの、個人的には制御理論の本質的内容を扱う良い論文が書けたと思っています。制御理論や凸最適化が好きな方にはぜひ読んでいただきたいです。また、自分が何個かの命題を証明するなどした Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ に関する論文（筆頭著者は先輩）もじき公開されると思います。この先輩は台湾人でほぼ毎日昼食を一緒に食べるなど仲良くしてもらっています。以下、投稿した論文の簡単な解説です。

- Y. Watanabe and Y. Zheng: **Revisiting Strong Duality, Hidden Convexity, and Gradient**

Dominance in Linear Quadratic Regulator. https://arxiv.org/abs/2503.10964

UCSD に入って最初の論文で、50 ページ近くある個人的力作です。最適制御のもっとも基本的な問題設定である Linear quadratic regulator (LQR) の見落とされていた細かな性質を調べ直した論文で、フォーマルに述べられていなかったさまざまな性質をきちんと定式化・証明しました。個人的には気に入っている論文です。（面白いトピックを提案してくれた指導教員に感謝です。）メインの内容は 3 点あります。

1. 非凸形の LQR が強双対性を満足すること
2. Gradient dominance (Polyak Lojaseiwicz 不等式) のより一般的な十分条件の導出
3. 双対定理を用いた静的な線形状態フィードバック則の解析的な導出

教科書においては LQR は変分法や動的計画法で解くのが一般的ですが、本論文ではこれらを使わず、有限次元凸最適化（おもに SDP、LMI、双対定理）の範囲で解析しています。付録で述べた S-lemma と LQR の類似性も興味深いです。 制御理論や凸最適化が好きな方にはおもしろい内容になっていると思います。興味ある方は解説しますのでぜひご連絡ください！

- Y. Watanabe, C.-F. Pai, and Y. Zheng: **Semidefinite Programming Duality in Infinite-Horizon Linear Quadratic Games.** https://arxiv.org/abs/2504.02201

  一本目の論文の副産物的な論文で、双対性ベースの解析を LQ ゲームの鞍点の解析的な導出に応用しました。ついでにゲームの結果を使って状態フィードバック $\mathcal{H}_\infty$ 制御も解いています。これらは LQR にはない外乱を考慮する必要があり、minimax 問題を解くことになるため、LQR よりも難しい問題といえます。この技術的課題を解消するテクニックを思いつけたため、それを論文にまとめました。実はこのバージョンには含めていない結果もいろいろあり（主結果の逆や強双対性など）、そちらも個人的にはおもしろい内容だと思っているので、じき纏めて公開したいと思います。ちなみにこの論文を書く際に微分ゲームに関するある疑問がどうしても自力で解決できず、ダメ元で最大の大御所である Tamer Basar 教授（UIUC）にメールを送ってみたところ、非常に丁寧に答えてくれたという感激エピソードもありました。ビッグネームがビッグネームたる所以を垣間見ました。メール返信の速さも見習っていきたいところです。

3.2 最近やっているテーマ

現在は上記の研究の査読を待ちつつ、(1) $\mathcal{H}_\infty$ 最適制御問題を解くアルゴリズムや (2) 非凸 QCQP における SDP 変換のタイトネスとその制御への応用を研究しています。個人的にはいずれもかなり熱いテーマです。興味のある方はぜひご連絡ください！！

(1) $\mathcal{H}_\infty$ 最適制御問題

$\mathcal{H}_\infty$ 最適制御問題はじつは理論的にも完全には解かれていない難しい問題です。よく知られている $\mathcal{H}_\infty$ 制御の解は $\mathcal{H}_\infty$"準"最適制御に対するものです。さらに、これにゲインの構造制約を追加した問題はより困難な問題として知られています。これらの解法としては LMI を用いる（緩和）解法がよく知られていますが、変数のオーダーや計算コストが大きいこと（$n^2 + mn$ 個の変数）が知られており、この欠点から、nm 個の変数だけを用いる効率的な局所探索 (Apkarian & Noll 2006, Burke et al. 2006 など) もよく用いられています。実

際、hinfstruct や systune といった MATLAB 関数として Robust control toolbox に実装され，実際の JAXA や EU のロケット制御などにすでに応用されるなどの成功を納めてきました。しかしながら、こちらの $O(mn)$ のアルゴリズムは難解な非凸非平滑最適化問題を解く複雑なローカルサーチであり、ほぼ Apkarian 氏とその共同研究者らによって独自に完成させられたためか、アルゴリズムの改善やそれに対する最新の知見の導入はあまり進んでいないと言えます。また Burke らのアルゴリズム (Gradient sampling, HIFOO) やその派生手法はリプシッツ連続関数を対象とした手法であり、理論解析は比較的整っているのですが、この手のアプローチが $\mathcal{H}_\infty$ に対してベストだとはやや思いづらいです。そのため、私はこれらアルゴリズムを最近の知見を使ってアップデートするという研究をしています。非凸最適化が専門の台湾人の同僚（上記の先輩とは別の人）と共同で取り組んでおり、、非常に難解ですが少しずつ光明が見えてきてはいるので頑張りたいところです。

(2) **非凸 QCQP の制御理論への応用**

近年の最適化界隈では、非凸最適化問題をきちんと解こうという機運が高まっています。そんな中でいま注目を浴びつつあるのが、非凸二次制約付き二次計画問題（非凸 QCQP）です。近年の研究において、その半正定値計画緩和や双対問題を用いて大域最適解を計算することが可能となるケースの詳細やその十分条件などが少しずつではあるものの明らかにされつつあります。(日本人グループも活躍している研究領域です。) 私の最近の論文もある意味この流れに載っており、たとえば LQR がこの性質を持っていることを上述の論文に書きました。これら理論を非線形最適制御問題に応用しようというのが本研究のモチベーションです。非線形状態方程式、コスト関数、非線形制約、初期条件といった複数のファクターが複雑に絡み合う非常に難解な研究です。この研究には非凸最適化問題の強双対性にも深く関連しており、この研究は線形システムに対する結果の一般化でもあります。じつは非線形最適制御における大域最適性は、京大時代の出身研究室（大塚研）時代からずっと疑問に思っていた研究課題でした。いまは限定的な状況やその近傍での結果しかなく、解析は困難を極めているのですが、なんとか良いアプローチを見出したいです。

4　コースワーク

主に制御や最適化周りでいくつか受講しました。Winter quarter は二つの講義を受けました。一つ目は指導教員がやっている凸解析や半正定値計画、Sum of Squares に関する講義でした。研究で活用している知識が中心だったためか、筆記試験で 92.5/100（平均点は 46 点くらい）を取りクラス一位でした。最終成績も受講者内で唯一の A+ でいい復習になりました。二つ目にとったのは非平滑関数の最適化に関する Math department の講義でした。Davis, Drusvyatskiy の weakly convex functions に関する結果など 2020 年前後の新しめなブレイクスルーを積極的に扱う良い講義でした。春には Cortes 教授の非線形制御のコースも聴講しました。30 年ほど前に発展した微分幾何ベースの非線形制御を扱っています。自分のやっている内容から比較的遠い内容ではあるものの、いずれは非線形制御で何か結果を出したいという思いがあるため、これも受講してよかったかなと思います。

研究の傍でさまざまな講義を受けて知識を広げられるのは、5 年間という時間が与えられているアメリカの大きな利点だと思います。次の秋学期からはもっと数学に力を入れていこうと思い

ます。

5　その他

研究や私生活はそれなりに楽しんでいますが、事務手続きは失敗ばかりでした。一度 ITIN の申請がリジェクトされてしまったり、日本の確定申告、米国の Tax return で手間取ったりするなど、事務関係の処理がたいてい一筋縄ではいきませんでした。日本にいた頃からこの手の作業は大の苦手で、英語が読めないというよりも自分の理解力が低いといった感じです。いつか取り返しのつかない失敗をしそうですし、そろそろ自分が情けなく感じ始めたのでなんとかしたいです。

加えて 4 ヶ月くらいは継続していた自炊の習慣もいつのまにか完全に途絶えてしまいました。日本にいた頃は年に一回自炊するかしないかという状態だったため私本来の姿に戻ったともいえますが、やはり食事を節約して他のことにお金を使っている人を見ると偉すぎるなと感じます。（ある意味で自炊に割く思考・時間的リソースをお金で節約しているともいえます）事務関連と同じくなんとかしたいところです。

6　おわりに

読んでいただきありがとうございました。留学経験なしの状態で PhD 進学して半年以上経過しましたが、充実した日々を送ることができておりチャレンジしてよかったなと感じています。これもさまざまな方の協力や応援、とりわけ船井財団のサポートがあってのことです。この場を借りてお礼申し上げます。