

船井情報科学振興財団第 6 回報告書

柳伶旺

2025 年 3 月

カリフォルニア工科大学
Applied and Computational Mathematics PhD 課程

カリフォルニア工科大学の PhD 課程 3 年目の柳です。昨年 7 月に開催されたイギリス、ケンブリッジ大学での船井財団の夏の交流会では、多くの奨学生と交流して楽しい時間を過ごすことができました。

早いもので第 6 回目の報告書です。年末に書くはずの本報告書を書くのが現在 2025 年の 3 月になってしまっているため、今は 3 年目の冬学期をちょうど終えたところです。

この段階では本報告書を読んでくれている人も限られてきていると思います。内容も一般向けというよりは自分の備忘録的な感覚に近くなってしまうかもしれません。目次もつけておくので、興味のある箇所だけ読んでいただければと思います。読んでいただいている方はありがとうございます。

目次

1	応用数学 (Applied and Computational Mathematics) への変更	2
2	研究	2
2.1	現在の研究	2
2.2	今までの研究	2
3	授業	3
3.1	CMS/ACM/IDS 107: Linear Analysis with Applications	3
3.2	CMS/ACM 117: Probability Theory and Computational Mathematics	3
4	生活	4
5	最後に	4

1 応用数学 (Applied and Computational Mathematics) への変更

専攻を応用数学 (正式には Applied and Computational Mathematics での PhD 取得を目指す) に変更しました。現在の指導教員の Kaushik Bhattacharya の強い推薦、またもう一人の指導教員の Nadia Lapusta のサポートがあり、変更することができました。Kaushik と Nadia 両方応用数学のバックグラウンドを持ちますが、応用数学者である Andrew Stuart に応用数学の公式なアドバイザーになってもらいました。

もともと、材料のマルチスケールな物理 (材料の様々なスケールでの微細構造や、それを制御するメタマテリアルという考え方) に興味を持っていました。また、材料科学で勉強した熱力学やそれを微視的な視点から理解する統計力学が好きでした。複雑で多様な現象を「統計」という考え方を通して、微視的な物理と巨視的な物理を繋げることがとても面白いと感じていました。しかし勉強していく中で、非平衡な状態、非線形性の強い系、材料の微細構造のような中間的な空間スケールを通したマルチスケールな現象を理解するためには、高度な確率統計や数学の知識が必要だと感じました。さらに、Kaushik が担当する変分法 (Calculus of Variations) や均質化 (Homogenization) などの応用数学の授業を履修する中で、数学的アプローチによって材料の複雑な挙動を捉える面白さを強く感じるようになり、より深く応用数学を学び、それに根差した研究を行いたいと思い、変更することを決めました。

2 研究

2.1 現在の研究

上記の Kaushik、地震や断層力学の専門家である Nadia、そして Andrew と一緒に、地震断層のマルチスケールな力学について研究しています。断層のダイナミクスは、材料のミクロな力学 (摩擦) とマクロな弾性波の伝搬によって支配されます。時間軸でも数年から数百年にわたるゆっくりとした地殻変動荷重から、数秒オーダーで進行する動的な破壊伝播まで、非常に異なるスケールをまたいで理解する必要があります。こうした空間的・時間的にマルチスケールなダイナミクスを、応用数学を用いて理解していきたいと考えています。

2.2 今までの研究

以前一緒に研究していた Chiara とともに論文を書いています。研究の方向性を変えることになったタイミングで、理論とシミュレーションだけで投稿しようという予定でしたが、新しく入った学生がこのテーマに興味があるということで、その子が実験を行い、実験のデータを含めて論文にしようということになりました。Granular systems を伝播する非線形孤立波の研究も面白いので、しっかりと最後までまとめられたらいいなと思います。数学も色々と勉強しているので、PhD でのメインテーマとして扱うことはやめましたが、そのような新しい視点を加えて発展させられるかもしれないとも思っています。

名古屋大学の上野智永先生とも修士で行っていた研究に関する最後の論文を現在投稿中です。カーボンナノチューブ超軽量材料の機械特性の論文です。面白いのですが、材料の複雑さゆえに理論的なことはできていません。いつかこのような複雑な材料も数理モデルで理解できたらいいなと思います。

3 授業

今のアドバイザーは授業を大切にしており、進んで履修するように指導を受けています。もともとたくさんのお話を学ばれたので、その点でも相性がいいと思っています。秋学期に関数解析と確率論の授業をとったので、紹介したいと思います。冬学期にはこれを元に、確率過程（主にガウス過程）に関する授業（ACM118）も受けましたが、それに関しては次の報告書でまとめたいと思います。

3.1 CMS/ACM/IDS 107: Linear Analysis with Applications

上記の Andrew Stuart が担当する授業でした。関数解析の授業で、基本的には線形な作用素に関して学びました。関数解析は無限次元の線形代数とよく言われます。数学や物理で扱う関数をベクトルとみなし、その空間が無限次元となるためです。有限次元の線形代数では、行列がベクトル空間上の線形変換を表しましたが、無限次元のベクトル空間でもそのような変換を作用素を通して理解します。

一週目に位相空間、線形空間、バナッハ空間、ヒルベルト空間について、二週目からは線形作用素について詳しく学びました。距離空間のコンパクトな埋め込みやコンパクト作用素の概念を理解するには時間がかかりました。中間試験後はヒルベルト空間の理論により焦点が当てられ、スペクトル理論（固有値の理論）やフーリエ解析、ジョルダン標準形の理論について学びました。Application という名前がついているとおり、宿題ではグラフラプラシアンや有限要素法の理論の証明だけでなく、プログラミングを自分で書いて理論（漸近的な挙動）と照らし合わせる宿題もありました。Real Analysis の知識に関しても前学期の変分法の授業の時に一通り勉強したので、そこまで大変な思いはせずに楽しく授業を履修することができました。

3.2 CMS/ACM 117: Probability Theory and Computational Mathematics

日本語だと、測度論的確率論だと思います。とてもボリューム満点のクラスでした。最初の三週間は毎週 3 回の授業があり、非常に高速で進みました。

一週目で測度論、二週目でルベグ積分について学びました。測度の考え方、シグマ加法族、ルベグ積分などの理解には時間がかかりましたが、ここでわからないと、それ以降の授業についていけなくなると思い、頑張って勉強しました。二週間で進む量ではないと思いましたが、教授もカルテックだからいいよね、みたいなノリでした。しかし授業が非常にうまく構成されているため、ちゃんと学ぶことができました。三週目では確率空間や確率変数、期待値の厳密な導入を行い、四週目で、モーメントやテール、 L_p 空間など、一通り確率論の基礎を学びました。五週目は L_2 空間に焦点を当てて、分散、確率変数の独立性など勉強しました。六週目からは難易度がさらに上がり、Independent sums に関する理論（大数の法則や中心極限定理）について学びました。一応知識としてあったこれらの確率の漸近的な挙動の理論をしっかりと勉強できて良かったです。八週目の Conditioning は最初とても難しく感じました。ここで条件付き期待値などをしっかりと勉強することで、非常に抽象的で理解が難しかったシグマ加法族の理解も深まったと思います。最後の二週間はマルチンゲールについて勉強しました。

内容がとても濃い授業ですが、担当する教員の Tropp はとても授業がうまく、カルテックで受けた授業で一番よかったと思います。教科書はHP で公開されています。

4 生活

快適に過ごしています¹。去年から一緒に暮らしているルームメイトと非常に仲良くしています。彼は Brent Fultz²という材料科学者と、フォノン（材料の原子の格子振動）や材料の熱力学に関する研究をしています。特に、材料のエントロピーに現れるフォノンの非線形効果の研究をしています。彼の研究や熱力学に関して、日々議論することはとても楽しく、微視的な材料科学の知識もアップデートされるので嬉しいです。彼はフォノンの話が大好きなので、会話の8割以上はフォノンに関するものです。私も日々フォノンについて詳しくなっています。今深く勉強している応用数学の知識を用いていつかコラボレーションできたら嬉しいです。

5 最後に

PhD 入学当初は専攻を変えるとは思っていなかったし、思い描いていた“順調な” PhD 課程とはかけ離れています（むしろ、思い描いていた以上に刺激的な PhD 課程だと感じています）。研究は難しいこと、うまくいかないこと、不確かなことが多いですが、純粋に学問を楽しめば、それらも含めて楽しむことができます。上の文章では、専攻を変更した理由を色々と書きましたが、結局のところ、「応用数学が楽しく、もっと勉強したいし、これをキャリアにしたい」という思いが一番大きな理由でした。自分の知的好奇心、情熱を自由に追求することが、充実した研究人生、さらにはいい研究にも繋がるのではないかと考えています。

そして、こうして自由に研究できているのも船井財団のご支援のおかげであり、心より感謝申し上げます。また、名古屋大学の上野先生には、引き続きオンラインで論文執筆についてご指導いただき、定期的にお話ししていただいていることに深く感謝しております。今後も一層精進していきたいと思います。

¹Chipotle というメキシカンにハマっています。

²Brent の教科書 (Phase Transitions in Materials) はとてもおすすめで、材料科学を物理として学ぶことができます。